0.1 Morita Theory

Definition 0.1.1

R, S を Ring としたとき、M が (R, S)-bimodule であるとは、M が left R-module かつ、right S-module であり、

$$(rx)s = r(xs) \qquad (r \in R\ ,\ x \in M\ ,\ s \in S)$$

が成り立つことである。このとき、${}_RM_s$ と書いたりする。

Definition 0.1.2 *Generator*

R を Ring、$P \in \mathbf{Mod}_R$ としたとき、P が generator（生成加群）であるとは、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(P, -) : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

が faithful functor となることである。

Remmark 0.1.3

generator の条件をもう少し言い換えておく。P が generator とは、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(P, -) : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

が faithful。つまり、任意の $f : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)$ に対し、

$$f_* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(P, N)$$

を考えたとき、$f \mapsto f_*$ の対応が単射であるわけだが、よって f が zeromap でなければ f_* も zeromap ではない。よってある $g : P \longrightarrow M$ が存在し、$f \circ g : P \longrightarrow N$ が zeromap ではない。

Lemma 0.1.4

$\alpha : Q \longrightarrow P$ を全射としたとき、P が generator ならば、Q も generator である。

proof) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)$ を nonzero map としたとき、$g : P \longrightarrow M$ が存在し、

$$f \circ g : P \longrightarrow N$$

は nonzero である。このとき、α は全射であるから、

$$f \circ (g \circ \alpha) : Q \longrightarrow N$$

も nonzero map である。

$\square$

Remmark 0.1.5

$P_R \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、

$$\mathrm{tr}(P) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(P,R)} \mathrm{Im} f$$

とおく。これは R の（両側）ideal となる。

proof)　　$\mathrm{tr}(P)$ が R の左作用で閉じているのは、$\mathrm{Hom}(P,R)$ が左 R-module であることから。また右作用で閉じていることは、P_R が右 R-module で $f \in \mathrm{Hom}(P,R)$ が作用を保つことから示される。

Proposition 0.1.6

$P \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、次の条件は同値である。

1. P : generator
2. $\mathrm{tr}(P) = R$
3. R は finite directsum である $P^n = \oplus_{i=1}^n P$ の直和成分である。
4. 任意の $M \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、全射 $\oplus P \longrightarrow M$ が存在する。

proof)　　$(1 \Longrightarrow 2)$ から示していく。$\mathrm{tr}(P) \neq R$ とすると、

$$p : R \longrightarrow R/\mathrm{tr}(P)$$

は nonzero である。P が generator なので、$g : P \longrightarrow R$ が存在し、

$$p \circ g : P \xrightarrow{g} R \xrightarrow{p} R/\mathrm{tr}(P)$$

が nonzero である。これはつまり、$\mathrm{Im} g = g(P) \not\subset \mathrm{tr}(P)$ であるが、これは矛盾である。

$(2 \Longrightarrow 3)$。$\mathrm{tr} P = R$ であるため、$1_R = \sum_{i=1}^n f_i(p_i)$ となる $f_i \in \mathrm{Hom}(P,R)$ と $p_i \in P$ が存在する。これより、

$$\sum f_i : P^n \longrightarrow R$$

は分解全射であり、R は P^n の直和成分である。

$(3 \Longrightarrow 4)$。任意の $M \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、

$$\oplus_{m\in M} R = F(M) \longrightarrow M$$

という全射を考えることができる。このとき、仮定より $\oplus P \longrightarrow R$ という全射も存在するので成立する。

$(4 \Longrightarrow 1)$。$f : M \longrightarrow N$ を nonzero map とする。仮定より、

$$\alpha : \oplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

という全射が存在する。このとき、

$$f \circ \alpha : \oplus P \longrightarrow N$$

は nonzero であるから、ある $\lambda \in \Lambda$ に対し、

$$P_\lambda = P \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

は nonzero である。

$\square$

Remmark 0.1.7

R, S, T を Ring とする。このとき、

1. $({}_S X_R) \otimes_R ({}_R Y) = {}_S(X \otimes_R Y)$
2. $(X_R) \otimes_R ({}_R Y_T) = (X \otimes_R Y)_T$
3. $({}_S X_R) \otimes_R ({}_R Y_T) = {}_S(X \otimes_R Y)_T$
4. $\mathrm{Hom}_R({}_R X_S, {}_R Y) = {}_S\mathrm{Hom}_R(X, Y)$
5. $\mathrm{Hom}_R({}_R X, {}_R Y_T) = \mathrm{Hom}_R(X, Y)_T$
6. $\mathrm{Hom}_R({}_R X_S, {}_R Y_T) = {}_S\mathrm{Hom}_R(X, Y)_T$
7. $\mathrm{Hom}_R({}_S X_R, Y_R) = \mathrm{Hom}_R(X, Y)_S$
8. $\mathrm{Hom}_R(X_R, {}_T Y_R) = {}_T\mathrm{Hom}_R(X, Y)$

9. $\mathrm{Hom}_R({}_SX_R, {}_TY_R) = {}_T\mathrm{Hom}_R(X,Y)_S$

Remmark 0.1.8

M を R-module としたとき、$\mathrm{End}_R(M)$ は通常の和と積を合成で定義することにより環となる。

Definition 0.1.9

R : Ring、P : right R-module、$Q = \mathrm{Hom}_R(P,R)$, $S = \mathrm{End}_R(P)$ とおく。このとき、

1. P は以下の作用で (S,R)-module と見れる。

$$S \times P = \mathrm{End}_R(P) \times P \xrightarrow{ev} P$$

2. Q は以下の作用で (R,S)-module と見れる。

$$Q \times S = \mathrm{Hom}_R(P,R) \times \mathrm{End}_R(P,P) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_R(P,R) = Q$$

Lemma 0.1.10

上記の状況において、

$$\alpha : Q \otimes_S P \xrightarrow{ev} R$$

は (R,R)-morphism であり、

$$\beta : P \otimes_R Q \xrightarrow{\cdot} S$$

は (S,S)-morphism である。

proof)　　まず α から見ていくと、

$$\alpha(r(f,p)) = \alpha(rf,p) = rf(p) = r\alpha(f,p)$$

であり、

$$\alpha((f,p)r) = \alpha(f,pr) = f(pr) = f(p)r = \alpha(f,p)r$$

なので (R,R)-morphism である。次に β に関しては、

$$\beta(s(p,f))(x) = \beta(s(p),f)(x) = s(p)f(x) = s(pf(x)) = s \circ pf(x) = s\beta(p,f)(x)$$

であり、

$$\beta((p,f)s)(x) = \beta(pf \circ s)(x) = pf \circ s(x) = (pf) \circ s(x) = \beta(p,f)s(x)$$

となる。

□

Definition 0.1.11

R : Ring と、right R-module である P から定まる上記の情報 $(R,P,Q,S;\alpha,\beta)$ を Morita context と呼ぶ。

Proposition 0.1.12

$(R,P,Q,S;\alpha,\beta)$: Morita context において、

$$P_R : \text{generator} \Longleftrightarrow \alpha : 全射$$

proof) α の定義により $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{tr}(P)$ であるため、

$$\alpha : 全射 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\alpha = \mathrm{tr}(P) = R \Longleftrightarrow P : \text{generator}$$

□

Proposition 0.1.13

$(R,P,Q,S;\alpha,\beta)$: Morita context において、P_R : generator とすると、

1. α is (R,R)-isomorphism
2. $Q \cong \mathrm{Hom}_S({}_SP_R, {}_SS_S)$ as (R,S)-module
3. $P \cong \mathrm{Hom}_S({}_RQ_S, {}_SS_S)$ as (S,R)-module
4. $R \cong \mathrm{End}({}_SP) \cong \mathrm{End}(Q_S)$ as Ring

proof) 1 について。全射であることは示したので単射を示す。まず α が全射より、

$$\sum_i q_i \otimes p_i \in Q \otimes P$$

が存在し、$\alpha(\sum q_i \otimes p_i) = \sum q_i(p_i) = 1_R$ を満たす。

$$\sum_j q'_j \otimes p'_j \in Q$$

に対し、$\alpha(\sum q'_j \otimes p'_j) = \sum q'_j(p'_j) = 0$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}\sum_j q'_j \otimes p'_j &= \sum_j (\sum_i q_i \otimes p_i) q'_j \otimes p'_j \\ &= \sum_{i,j} q_i(\beta(p_i \otimes q'_j)) \otimes_s p'_j \\ &= \sum_{ij} q_i \otimes \beta(p_i \otimes q'_j) p'_j \\ &= \sum_i q_i \otimes p_i(\sum_j q'_j(p'_j)) = 0\end{aligned}$$

2)　$\lambda : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(P, S)$ を $\lambda(q)(p)(p') = pq(p')$ で定義する。このとき、以下のことを確かめなければならない。

1. $\lambda(q)(p) : P_R \longrightarrow P_R$ が右 R 準同型であること。
2. $\lambda(q) : {}_SP \longrightarrow {}_SS$ が左 S 準同型であること。
3. $\lambda : {}_RQ_S \longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}_S(P, S)_S$ が (R, S) 準同型であること。
4. λ が全単射であること。

問題は作用とうまく可換になっているかということである。1 から見ていく。

$$\lambda(q)(p)(p'r) = p(q(p'r)) = p(q(p')r) = (pq(p'))r = (\lambda(q)(p)(p'))r$$

続いて 2 は、

$$(\lambda(q)(sp))(p') = (s(p))q(p') = s(pq(p')) = s(\lambda(q)(p)(p')) = (s\lambda(q)(p))(p')$$

であり 3 は、

$$((\lambda)(rq))(p)(p') = p(rq)(p') = p(rq(p')) = (pr)q(p') = (\lambda(q))(pr)(p') = (r(\lambda(q)))(p)(p')$$

また、

$$((\lambda)(qs))(p)(p') = p(qs(p')) = \lambda(q)(p)(s(p')) = ((\lambda(q)(p))s)(p) = (\lambda(q)s)(p)(p')$$

最後に 4 であるが、1) により、$1_R = \sum q_i(p_i)$ と表せることに注意する。まず単射を示す。$\lambda(q) = 0$ とすると、任意の $p \in P$ に対し、

$$q(p) = 1_R q(p) = \sum q_i p_i q(p) = \sum q_i(p_i q(p)) = \sum q_i(\alpha(q)(p_i)(p)) = 0$$

続いて全射であるが、任意の $f \in \mathrm{Hom}_S(P,S)$ に対し、

$$\begin{aligned} f(p) = f(p1_R &= f(p\sum q_i(p_i)) \\ &= \sum f(pq_i(p_i)) \\ &= \sum pq_i(f(p_i)) = p\sum q_i f(p_i) \end{aligned}$$

である。途中 $pq_i : P \longrightarrow P$ を S の元と見て、f との可換性を用いている。このとき、

$$g = \sum q_i f(p_i) : P \longrightarrow R$$

に対し、$\lambda(g)(p) = pg = f(p)$ である。

3) は 2) と同様である。そして 4) は

$$\sigma : R \longrightarrow \mathrm{End}(_SP) \quad , \quad \tau : R \longrightarrow \mathrm{End}(Q_S)$$

をそれぞれ、$\sigma(r)(p) = pr$, $\tau(r)(q) = rq$ で定義すれば、これは環準同型で同型になるのは 2) での証明法と同じである。

□

Lemma 0.1.14

$P \in \mathbf{Mod}_R$ が finite generated projective module $\Longleftrightarrow$ P が R^n (for some $n \in \mathbf{N}$) の直和成分。

proof) $\Longrightarrow$ P の生成系を $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$ とおくと、$\rho : R^n \longrightarrow P$ を $(r_1, \cdots, r_n) \mapsto \sum u_i r_i$ と定義すれば、これは全射準同型で P が projective ということで分解する。よって P は R^n の直和成分である。

$\Longleftarrow$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "g:\mathrm{suj}"] \\ P \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

の状況を考える。仮定より、$R^n \cong P \oplus Q$ となる $Q \in \mathbf{Mod}_R$ が存在する。$P \oplus Q \longrightarrow P$ への projection を考えると、$R^n \cong P \oplus Q$ は free、つまり projective であるから、

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "g:\mathrm{suj}"] \\ P \oplus Q \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "\tilde{f}"] & P \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にする $\tilde{f} : P \oplus Q \longrightarrow X$ が存在する。よって、

$$h : P \longrightarrow X$$

を $h(p) = \tilde{f}(p, 0)$ により定義すれば、$g \circ h(p) = g \circ \tilde{f}(p, 0) = f(p)$ である。よって、P は projective である。さらに、$R^n \oplus P \oplus Q$ の生成系を $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ と適当に選んだとき、$pr_1(v_i) = u_i$ とすれば $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$ が P の生成系になることは、任意の $u \in P$ に対し、

$$(u, 0) = \sum r_i v_i$$

と表せ、

$$u = pr_1(u, 0) = \sum r_i pr_1(v_i) = \sum r_i u_i$$

となるためである。

□

Proposition 0.1.15

$P \in \mathbf{Mod}_R$ を finite generated module としたとき、次の条件は同値である。

1. P は projective module である。
2. 任意の生成系 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ に対し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathrm{Hom}(P, R)$ が存在し、任意の $u \in P$ に対し、
$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_i(u)$$
を満たす。

proof)　$1 \Longrightarrow 2$ を示す。$\rho : R^n \longrightarrow P$ を $(r_1, \cdots, r_n) \mapsto \sum u_i r_i$ と定義すれば、これは全射準同型で P が projective ということで、この分解準同型を $\mu : P \longrightarrow R^n$ とおく。さらに、$p_i : R^n \longrightarrow R$ を i 成分への projection とし、$\alpha_i = p_i \circ \mu : P \longrightarrow R$ とおく。任意の $u \in P$ に対し、

$$u = \rho \circ \mu(u) = \rho(\alpha_1(u), \cdots, \alpha_n(u)) = \sum u_i \alpha_i(u)$$

$2 \Longrightarrow 1$ を示す。

$$\mu : P \longrightarrow R^n$$

を $u \mapsto (\alpha_1(u), \cdots, \alpha_n(u))$ で定義する。このとき、

$$\rho \circ \mu(u) = \rho(\alpha_1(u), \cdots, \alpha_n(u)) = u$$

となり、$\rho \circ \mu = 1_P$ ということで、ρ は分解全射であるため、P は R^n の直和成分である。

□

上記の P の生成系 U から決まる（一意的ではない）$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathrm{Hom}(P, R)$ の集合を U の双対生成系と呼ぶ。

Proposition 0.1.16

$P_R \in \mathbf{Mod}_R$ を finite generated projective module とすると、${}_R\mathrm{Hom}(P, R)$ は finite generated projective module であり、生成系として双対生成系が取れる。

proof) $\rho : R^n \longrightarrow P$ の分解全射を思い出せば、

$$\rho^* : \mathrm{Hom}(P, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R^n, R) \cong R^n$$

は分解単射である。よって、$\mathrm{Hom}(P, R)$ は R^n の直和成分。よって、$\mathrm{Hom}(P, R)$ は finite generated projective module であるが、このとき、$f \in \mathrm{Hom}(P, R)$ に対し、

$$f(u) = f(\sum u_i \alpha_i(u)) = \sum f(u_i)\alpha_i(u)$$

であるので、$f = \sum f(u_i)\alpha_i$ と表されるので、双対生成系を生成系に取れる。

□

Definition 0.1.17

$X_R \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、

$$\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X, R), R)$$

を $\varepsilon_X(x)(f) = f(x)$ により定義すれば、これは準同型で、

$$\varepsilon : id \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(-, R), R)$$

という natural transformation が定義できる。これを evaluation map と呼ぶ。

Proposition 0.1.18

$P_R \in \mathbf{Mod}_R$ を finite generated projective module とすると、

$$\varepsilon_P : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, R), R)$$

は同型である。

proof)　$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を P の生成系、$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ をその双対生成系とする。まず単射から示す。

$u \in P$ に対し、$\varepsilon(u) = 0$ とすると、

$$u = \sum u_i \alpha_i(u) = \sum u_i(\varepsilon(u)(\alpha)) = 0$$

なので単射である。また、$\rho : R^n \longrightarrow P$ を分裂全射とすれば、

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\cong"'] & P \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(R^n, R), R) \arrow[r, "\rho^{**}"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, R), R) \end{tikzcd}$$

が可換で、ρ^{**} も分裂全射であるので ε も全射である。

□

Theorem 0.1.19

$P_R \in \mathbf{Mod}_R$ を finite generated projective module とすると、

$$\mathrm{Hom}(P, -) \cong - \otimes_R \mathrm{Hom}(P, R) : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

proof)　$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を P の生成系、$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ をその双対生成系とする。

$$\alpha_X : \mathrm{Hom}(P, X) \longrightarrow X \otimes_R \mathrm{Hom}(P, R) \quad , \quad \beta_X : X \otimes_R \mathrm{Hom}(P, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, X)$$

をそれぞれ、$\alpha_X(\alpha) = \sum \alpha(u_i) \otimes \alpha_i$　,　$\beta_X(x \otimes \alpha)(u) = x\alpha(u)$ により定義する。このとき、

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha(\alpha)(u) &= \beta\left(\sum \alpha(u_i) \otimes \alpha_i\right)(u) \\ &= \sum \alpha(u_i)\alpha_i(u) \\ &= \sum \alpha(u_i \alpha_i(u)) = \alpha(u) \end{aligned}$$

であるので、$\beta \circ \alpha = 1$ である。逆に、

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta(x \otimes \alpha) &= \alpha(\beta(x \otimes \alpha)) \\ &= \sum \beta(x \otimes \alpha)(u_i) \otimes \alpha_i \\ &= \sum x\alpha(u_i) \otimes \alpha_i \\ &= \sum x \otimes \alpha(u_i)\alpha_i \\ &= x \otimes \left(\sum \alpha(u_i)\alpha_i\right) = x \otimes \alpha\end{aligned}$$

であるため、$\alpha \circ \beta = 1$ である。

□

Corollary 0.1.20

$P_R \in \mathbf{Mod}_R$ を finite generated projective module とすると、

$$P \otimes_R - \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, R), -) : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

proof) $P^* = \mathrm{Hom}(P, R)$ において、Theorem 0.1.19 の議論を左 R 加群で考えれば、Prop 0.1.18 により、

$$\mathrm{Hom}(P^*, -) \cong P^{**} \otimes - \cong P \otimes_R -$$

となる。

□

Proposition 0.1.21

$(R, P, Q, S; \alpha, \beta)$: Morita context において、

$$P_R : \text{finite generated projective} \Longleftrightarrow \beta : \text{全射}$$

proof) $\Longrightarrow$ は示した。逆を示す。

$$\beta : P \otimes_R Q \overset{\cdot}{\longrightarrow} S$$

を全射としたとき、$\sum p_i \otimes f_i \in P \otimes_R Q$ s.t $\beta(\sum p_i \otimes f_i) = \sum p_i f_i = 1_S$ となるものが存在する。これより、$\mu : R^n \longrightarrow P$ を $(r_1, \cdots, r_n) \mapsto \sum p_i r_i$ で定義し、$f = (f_1, \cdots, f_n) : P \longrightarrow R^n$ とおけば、

$$\mu \circ f(u) = \mu(f_1(u), \cdots, f_n(u)) = \sum p_i f_i(u) = u$$

で分解するため、P は R^n の直和成分となり、finite generated projective である。

□

Proposition 0.1.22

$(R, P, Q, S; \alpha, \beta)$: Morita context において、P_R : finite generated projective とすると、

1. β is (S,S)-isomorphism
2. $Q \cong \mathrm{Hom}_R({}_S P_R, {}_R R_R)$ as (R, S)-module
3. $P \cong \mathrm{Hom}_R({}_R Q_S, {}_R R_R)$ as (S, R)-module
4. $S \cong \mathrm{End}(P_R) \cong \mathrm{End}({}_R Q)$ as Ring

proof)　(1) については示した。その他は Prop 0.1.13 と同様にやればよい。

□

Definition 0.1.23 *Faithly balanced*

R, S を Ring とする。(R, S)-module である P が faithly balanced であるとは、

$$R \cong \mathrm{End}(P_S) \quad , \quad S \cong \mathrm{End}({}_R P)$$

as Ring となることである。

Definition 0.1.24 *Progenerator*

Right R-module が generator かつ finete generated projective であるとき、progenerator（射影生成加群）と呼ぶ。また、(S, R)-module が faithly balanced で、right R-module、また left S-module としても progenerator であるとき、(S, R)-progenerator と呼ぶ。

Proposition 0.1.25

$(R, P, Q, S; \alpha, \beta)$: Morita context において、P_R が progenerator ならば、${}_S P, {}_R Q, Q_S$ も progenerator である。

proof)　例えば、Q_S について見てみると、Prop 0.1.22 により、

$$\mathrm{Hom}_S(Q_S, S_S) \cong P \ , \ \mathrm{End}(Q_S) \cong R$$

であったので、$(S, {}_RQ_S, {}_SP_R, R; \alpha', \beta')$ が Morita contex である。このとき、α', β' の定義を考えると、

$$\alpha' = \beta : P \otimes_R Q \longrightarrow S \quad , \quad \beta' = \alpha : Q \otimes_S P \longrightarrow R$$

となり、α, β はともに全射なので、Q_S は progenerator となる。また、左 module の場合はまた別に Morita context とそれにまつわる命題を考えるわけだが、面倒なので省略。この場合、Prop 0.1.13 も用いる。

$\square$

Lemma 0.1.26

R, S : Ring とし、

$$F : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_S$$

を equivalence of category とする。このとき、

$$P_R : \text{(pro)generator} \Longleftrightarrow F(P_R) : \text{(pro)generator}$$

特に、$F(R_R)$ は常に $\mathbf{Mod}_S$ における progenerator である。

proof) $G : \mathbf{Mod}_S \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ を F の inverce とする。まず P を generater for $\mathbf{Mod}_R$ とする。任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_S}(A, B)$: nonzero map に対し、$G(f) : G(A) \longrightarrow G(B)$ も nonzero map である。このとき、仮定より

$$P \xrightarrow{g} G(A) \xrightarrow{G(f)} G(B)$$

が nonzero となるような g が存在する。よって、

$$F(P) \xrightarrow{F(g)} F \circ G(A) \cong A \xrightarrow{f} F \circ G(B) \cong B$$

も nonzero である。よって、$F(P)$ も generator である。

続いて P を progenerator とする。このとき $F(P)$ が $\mathbf{Mod}_S$ における progenerator であることを示す。generator であることは示したので、finite generated projective を示せばよい。つまり $F(P)$ が S^n の直和成分であること、もっと言えば $S^n \longrightarrow F(P)$ の分解全射準同型があればよい。

P が projective であることより、$\alpha : R^m \longrightarrow P$ という全射が存在する。また、$G(S)$ は前半の主張から generator なので、$\beta : G(S)^l \longrightarrow R$ という全射が存在する。

$$\gamma = \beta^m : G(S)^{lm=n} \longrightarrow R^m$$

とすれば、これは全射である。よって、

$$\gamma \circ \alpha : G(S)^n \longrightarrow P$$

は全射であるが、P が projective なのでこれは分解全射である。また、$pr_i : S^n \longrightarrow S$ を i 成分への projection、$k_j : S \longrightarrow S^n$ を j 成分への inclusion（他の成分は 0）としたとき、

$$pr_i \circ k_j = 0 \quad (i \neq j) \ , \ pr_i \circ k_i = 1$$

である。このとき、

$$(G(pr_1), \cdots, G(pr_n)) : G(S^n) \longrightarrow G(S)^n$$

と、

$$\sum G(k_j) : G(S)^n \longrightarrow G(S^n)$$

を考えれば、$(G(pr_1), \cdots, G(pr_n)) \circ \sum G(k_j) = 1$ であるので、

$$(G(pr_1), \cdots, G(pr_n)) : G(S^n) \longrightarrow G(S)^n$$

は分解全射である。よって、

$$G(S^n) \longrightarrow P$$

への分解準同型がある。よって、

$$S^n \cong F \circ G(S^n) \longrightarrow F(P)$$

も分解準同型である。

□

Theorem 0.1.27

$(R, P, Q, S; \alpha, \beta)$: Morita context において、P_R が progenerator ならば、

$$- \otimes_R Q : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_S \ , \ - \otimes_S P : \mathbf{Mod}_S \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$$

は互いに equivalence of category の inverce であり、同様に

$$P \otimes_R - : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathbf{Mod} \ , \ Q \otimes_S - : {}_S\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathbf{Mod}$$

も equivalence of category の inverce である。すなわち、R と S は森田同値。

proof) $X \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、Prop 0.1.13 により

$$(X \otimes_R Q) \otimes_S P \cong X \otimes_R (Q \otimes_S P) \cong X \otimes_R R \cong X$$

という natural な isomorphism がある。逆も同様であり、左作用の時も同様である。

□

Example 0.1.28

R を ring とする。$R^n = \oplus_{i=1}^n R_R$ は progenerator である。これより、$\mathrm{End}(R^n) \cong M_n(R)$ as Ring であるので、R と $M_n(R)$ 森田同値。

Theorem 0.1.29

R, S を Ring とする。

$$F : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_S \quad , \quad G : \mathbf{Mod}_S \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$$

を互いに equivalence of category の invece とする。このとき、$Q = F(R_R)$, $P = G(S_S)$ とおけば、$P = {}_S P_R$, $Q = {}_R Q_S$ と bimodule structure が考えられ、これにより、

$$F \cong - \otimes_R Q \quad , \quad G \cong - \otimes_S P$$

となる。

proof) P_R であることは定義からであるが、

$$S \times P_R \cong \mathrm{End}(S) \times P \cong \mathrm{End}(P) \times P \longrightarrow P$$

により、${}_S P_R$ と見ている。Q も同様である。このとき、

$$\mathrm{Hom}_R(P, R) \cong \mathrm{Hom}_S(F(P), F(R)) \cong \mathrm{Hom}_S(S, Q) \cong Q$$

である。つまり、$(R, P, Q, S; \alpha, \beta)$ は Morita context である。よって、$M \in \mathbf{Mod}_R$ に対し、

$$F(M) \cong \mathrm{Hom}_S(S, F(M)) \cong \mathrm{Hom}_R(G(S), M) = \mathrm{Hom}_R(P, M) \cong M \otimes_R \mathrm{Hom}(P, R) \cong M \otimes_R Q$$

となるため、

$$F \cong - \otimes_R Q : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_S$$

であり、G においても同様である。

□

Theorem 0.1.30 *Morita Theorem*

R, S を Ring としたとき、R, S が森田同値であることと、(R, S)-progenerator が存在することは同値である。

proof)　($\Longrightarrow$)　$F : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_S$ を equivalence of category とすると、$Q = F(R_R)$ は Theorem 0.1.29 と Prop 0.1.25 により (R, S)-module であり、Q_S、${}_RQ$ として progenerator であり、$(S, Q, G(S), R; \alpha, \beta)$ が Morita context なので、

$$\mathrm{End}({}_RQ) \cong S \ , \ \mathrm{End}(Q_S) \cong R$$

である。

($\Longleftarrow$)　逆に P を (R, S)-progenerator としたとき、$(S, P, Q, R; \alpha, \beta)$ が Morita context である。

$$- \otimes_R P : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_S \quad , \quad - \otimes_S Q : \mathbf{Mod}_S \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$$

とすれば、Theorem 0.1.27 により equivalence である。

$\square$